Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XVII-a, 28 mai 2016

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Calculați: $\int_0^1 \frac{x^2 \cdot \left(1+x^{3n-6}\right)}{\left(1+x^3\right)^n} dx$.

Cătălin Zîrnă

Subiectul 2

Considerăm ecuația $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, cu $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ astfel încât $ae<0$ și $3b^2<8ac$. Să se arate că ecuația are două rădăcini reale distincte de semne contrare și două rădăcini care aparțin mulțimii $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Gazeta matematică

Subiectul 3

Fie (A,+,·) un inel comutativ. Notăm cu U(A) mulțimea elementelor inversabile ale inelului și M={x∈A/ ∃ n∈ℕ* astfel încât $x^n = 0$}. (M se numește mulțimea elementelor nilpotente)

a) Arătați că M este subgrup al grupului (A,+) și că M este parte stabilă a lui (A,·);

b) Arătați că dacă x∈M atunci 1-x∈U(A) și 1+x ∈U(A);

c) Dacă A este finit arătați card(M) divide card(U(A)).

* * *

Subiectul 4

Determinați funcțiile continue $f:(0,+\infty) \to \mathbf{R}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $f(x)=\frac{1}{x}\int_x^{e\cdot x} f(t)dt, \forall x>0$

ii) Există $\lim_{x\to\infty} x \cdot f(x)$.

Nelu Chichirim

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă are 7 puncte.